二重错排

1. 问题定义

一重错排问题中，我们要求一个排列 π 满足：

$$\pi(i) \neq i \quad \forall i$$

在此基础上 **二重错排** 要求：

- 对所有 $i = 1, 2, \ldots, n-1$：

$$\pi(i) \neq i, \quad \pi(i) \neq i+1$$

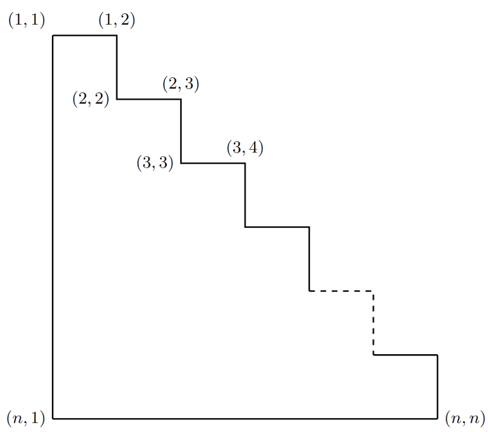
- 对 $i = n$（循环边界）：

$$\pi(n) \neq n, \quad \pi(n) \neq 1$$

2. 正确位置的等价建模

先考虑如下问题：

- 在一个 $n-1$ 阶的台阶，如下图
- 括号中第一个数表示序列索引，第二个数表示排入的数字
- 要求：每行每列均只能选择1个点



等价于：

> 将阶梯拉成一个环，在一个长度为 $2n$ 的**环**上，选择 k 个点，要求**不相邻**。

3. 组合构造得出等价模型的计算式

首先定义：

$$f(m,k) := \#\{\text{在长度为 } m \text{ 的圆环上选取 } k \text{ 个两两不相邻的点的方案}\}$$

下面用两种组合方式计算同一个量，从而得出 $f(m,k)$：

方法一：先选点，再切断

- 在环上选 k 个不相邻点：共有 $f(m,k)$ 种
- 剩下 $m-k$ 个点，从这些未选点中任选一个作为“切断点”，将环变成链

因此：

$$N = f(m,k)\cdot(m-k)$$

方法二：先切断，再选点

- 在环上任选一点，将环切断成链（有 m 种切法）
- 在有 $m-1$ 个点的链上选 k 个不相邻点

使用插空法，结果为：

$$\binom{m-k}{k}$$

因此：

$$N = m\cdot\binom{m-k}{k}$$

两种方法等价：

$$f(m,k)(m-k) = m\binom{m-k}{k}$$

得到：

$$\boxed{f(m,k) = \frac{m}{m-k}\binom{m-k}{k}}$$

4. 回到二重错排问题

使用容斥原理计算满足的排列数量：

设 $\pi \in S_n$ 是 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上的一个排列。

定义:

$$P_i = \{\pi \in S_n \mid \pi(i) = i \text{ or } i+1\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

其中

$$n + 1 \equiv 1$$

容斥原理展开:

$$N(\bar{P}_1 \bar{P}_2 \cdots \bar{P}_n) = N - \sum_i N(P_i) + \sum_{i<j} N(P_i P_j) \cdots + (-1)^n N(P_1 P_2 \cdots P_n)$$

其中:

$$N = n!$$

$$\#\{\text{满足 } P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}\} = f(2n, k)$$

由上文可知:

$$f(2n, k) = \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k}$$

一旦选定了正确排列 k 个位置:

- 固定 这 k 个位置，剩余 $n-k$ 个位置自由排列，即:

$$(n-k)!$$

因此:

$$N(P_1 P_2 \cdots P_k) = \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!$$

代入容斥原理公式:

$$\begin{aligned} N(\bar{P}_1 \bar{P}_2 \cdots \bar{P}_n) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot f(2n, k) \cdot (n-k)! \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)! \end{aligned}$$

从而得到二重错排的排列数为:

$$\boxed{N(\bar{P}_1 \bar{P}_2 \cdots \bar{P}_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!}$$

5. 应用：卢卡斯夫妻入座问题